Université Paul Sabatier de Toulouse, année universitaire 2003-2004

CIMP, PHYSIQUE

Corrigé sommaire du problème du contrôle continu 2 EN SECTION B

8 Décembre 2003

Diffusion de Rayleigh résonnante

1. a) La durée T que met l'électron pour effectuer une révolution complète autour du proton s'obtient aisément :

$$T = \frac{2\pi r_0}{v} \approx \frac{2\pi \times 52,9 \times 10^{-12} \times 137}{3 \times 10^8} = 1,52 \times 10^{-16}\,\mathrm{s}$$

b) Le mouvement circulaire étant uniforme, son accélération tangentielle est nulle et son accélération normale vaut :

$$a_n = \frac{v^2}{r_0} \approx \frac{9 \times 10^{16}}{52,9 \times 10^{-12} \times 137^2} = 9,064 \times 10^{22}\,\mathrm{m.s^{-2}}$$

soit environ 10^{22} fois $g = 9,81\mathrm{m.s^{-2}}$.

2. a) Le premier terme est $m\mathbf{a}$ de la loi de Newton, le deuxième traduit la force de frottement visqueux et le troisième représente une force élastique. Les constantes τ_e et ω_0 sont respectivement la durée de relaxation en énergie et ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur harmonique.

b) L'action d'un champ électrique sinusoïdal $\mathbf{E_{em}}$, de pulsation ω, orienté selon le déplacement X, introduit une force d'expression :

$$-e\mathbf{E}_{em} = -eA_m \cos(\omega t + \phi_e) \quad \text{d'où l'équation} \quad \ddot{X} + \frac{\dot{X}}{\tau_e} + \omega_0^2 X = E_m \cos(\omega t + \phi_e)$$

avec $E_m = -eA_m/m_e$.

3. a) On établit ce résultat en passant à la notation complexe et en cherchant des solutions en $\exp(j\omega t)$ dans l'équation différentielle. On trouven en simplifiant par $exp(j\omega t)$:

$$\underline{\ddot{X}}_m + \frac{\underline{\dot{X}}_m}{\tau_e} + \omega_0^2 \underline{X}_m = -\frac{e\underline{A}_m}{m_e}$$

d'où :

$$\underline{X}_m = -\frac{e\underline{A}_m/m_e}{(-\omega^2 + \omega_0^2) + j\omega/\tau_e} \quad \text{soit} \quad \underline{X}_m = \frac{-e\underline{A}_m/(m_e\omega_0^2)}{(-u^2+1) + ju/Q}$$

en introduisant le rapport des pulsations $u = \omega/\omega_0$ et le facteur de qualité $Q = \omega_0\tau_e$. Il en résulte que :

$$X_m = \frac{C}{\left[(u^2-1)^2 + u^2/Q^2\right]^{1/2}} \quad \text{avec} \quad C = \frac{eA_m}{m_e\omega_0^2}$$

b) L'accélération $\ddot{X}$ de l'électron a pour expression : $\ddot{X} = -\omega^2 X$, d'où le carré se son amplitude :

$$\ddot{X}^2 = \omega^4 X^2 = u^4\omega_0^4 \frac{C^2}{(u^2-1)^2 + u^2/Q^2} = \frac{e^2A_m^2}{m_e^2}\frac{u^4}{(u^2-1)^2 + u^2/Q^2}$$

Le carré de l'accélération est donc directement reliée à la fonction :

$$\mathcal{D}(u) = \frac{u^4}{(u^2-1)^2 + u^2/Q^2}$$

c) Pour $u \approx 1$, on a :

$$u^2 - 1 = (u-1)(u+1) \approx 2(u-1) \quad \text{d'où} \quad \mathcal{D}(u) \approx \frac{1}{4(u-1)^2 + 1/Q^2}$$

La largeur à mi-hauteur $\Delta u_{1/2}$ du pic de résonance s'en déduit en cherchant les valeurs de u pour lesquelles :

$$4(u-1)^2 = \frac{1}{Q^2}$$

car la valeur maximale est réalisée pour $u = 1$. Il en résulte :

$$u = 1 \pm \frac{1}{2Q} \quad \text{et} \quad \Delta u = \frac{1}{Q}$$

On en déduit $Q = 2,44 \times 10^8$ et $\tau_e = Q/\omega_0 = 8,41 \times 10^{-8}$ s.